MPSI 2024/2025 | Correction DS n°11 (2h)

I - Tige qui glisse sur un circuit capacitif

1) Flux du champ magnétique à travers le circuit : $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = Bax$

Loi de Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt} = -Bav$

Loi des mailles :

$$E + e = u_c + u_R \quad \Rightarrow \quad E - Bav = u_c + Ri \quad \Rightarrow \quad \boxed{-Ba\frac{dv}{dt} = \frac{i}{C} + R\frac{di}{dt}}$$

Force de Laplace sur la barre : $\vec{F}_L = iaB\,\vec{u}_x$

PFD sur la barre, projeté selon $\vec{u}_x$:

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = iaB}$$

2) On combine les deux équations :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{i}{aBC} - \frac{R}{aB}\frac{di}{dt} = \frac{iaB}{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{a^2B^2}{mR}\right)i = 0}$$

La solution est bien de la forme :

$$i(t) = i_0\,e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\tau = \left(\frac{1}{RC} + \frac{a^2B^2}{mR}\right)^{-1}}$$

À l'instant initial, $v(0) = 0$ et $u_C(0) = 0$ par continuité. L'équation électrique assure donc que :

$$i(0) = \boxed{i_0 = \frac{E}{R}}$$

3) L'équation mécanique assure que :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{aB}{m}i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad v(t) = -\frac{aB\tau}{m}i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \text{cte}$$

À l'instant initial, $v(0) = 0$, donc :

$$iv(t) = v_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{avec :} \quad \boxed{v_0 = \frac{aB\tau}{m}i_0}$$

4) On intègre la puissance fournie par le générateur :

$$\boxed{\mathcal{E}_g = \int_0^\infty Ei(t)\,dt = Ei_0\int_0^\infty e^{-\frac{t}{\tau}}\,dt = Ei_0\tau = \frac{E^2\tau}{R}}$$

5) On a :

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C} = \frac{i_0}{C}e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad u_c(t) = -\frac{i_0\tau}{C}\,e^{-\frac{t}{\tau}} + \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_c(t) = \frac{i_0\tau}{C}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

6) Énergie stockée dans le condensateur :

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}Cu_c^2(\infty) - \frac{1}{2}Cu_c^2(0) = \frac{1}{2}C\left(\frac{i_0\tau}{C}\right)^2 = \frac{i_0^2\tau^2}{2C}}$$

7) On intègre la puissance Joule :

$$\boxed{\mathcal{E}_J = \int_0^{\infty} Ri^2(t)\,dt = Ri_0^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}}\,dt = \frac{Ri_0^2\tau}{2} = \frac{E^2\tau}{2R}}$$

8) On intègre la puissance de Laplace :

$$W = \int_0^{\infty} \vec{F}_L \cdot \vec{v}\,dt = \int_0^{\infty} i(t)\,aB\,v(t)\,dt = i_0 aB\,v_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)dt = i_0 aB\,v_0\left(\tau - \frac{\tau}{2}\right) = \boxed{\frac{aBi_0v_0\tau}{2}}$$

9) L'équation électrique donne :

$$E = aBv + u_c + Ri \quad \Rightarrow \quad Ei = aBiv + iu_c + Ri^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_g = W + \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_J}$$

On peut vérifier ce résultat avec ce qui précède :

$$W + \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_J = \frac{aBi_0v_0\tau}{2} + \frac{i_0^2\tau^2}{2C} + \frac{E^2\tau}{2R} = \frac{aBi_0\left(\frac{aB\tau}{m}i_0\right)\tau}{2} + \frac{i_0^2\tau^2}{2C} + \frac{E^2\tau}{2R} = \frac{i_0^2\tau^2}{2}\underbrace{\left(\frac{a^2B^2}{m} + \frac{1}{C}\right)}_{=R/\tau} + \frac{E^2\tau}{2R}$$

En remplaçant i_0 par son expression, il vient :

$$\boxed{W + \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_J = \frac{E^2\tau}{2R} + \frac{E^2\tau}{2R} = \frac{E^2\tau}{R} = \mathcal{E}_g}$$

<u>Interprétation</u> : l'énergie fournie par le générateur est transformée en énergie électrostatique (stockée dans le condensateur), énergie Joule (perdue dans la résistance) et énergie cinétique (via la force de Laplace).

--------------------------------Fin de la partie I --------------------------------

II - Détecteur de métaux

10) Il est difficile de concevoir deux oscillateurs de fréquences d'oscillations rigoureusement identiques. On peut ajuster la fréquence en utilisant une capacité variable. On peut aussi exploiter les battements entre les deux signaux…

11) On a, dans chaque circuit :

$$\boxed{v_L = ri + L\frac{di}{dt} + M\frac{di_m}{dt}} \qquad \boxed{0 = L_m\frac{di_m}{dt} + M\frac{di}{dt}}$$

On en déduit :

$$\frac{di_m}{dt} = -\frac{M}{L_m}\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_L = ri + \left(L - \frac{M^2}{L_m}\right)\frac{di}{dt}}$$

Il s'agit bien de la loi des mailles du circuit équivalent, avec $L' = L\left(1 - \frac{M^2}{LL_m}\right)$.

12) La nouvelle fréquence f_d d'oscillation du détecteur vaut :

$$\boxed{f_d = \frac{1}{2\pi\sqrt{L'C}}}$$

On a :

$$f_d = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\left(1 - \frac{M^2}{LL_m}\right)^{-1/2} \simeq f_r\left(1 + \frac{M^2}{2LL_m}\right)$$

Donc :

$$\boxed{\Delta f = |f_r - f_d| = f_r \cdot \frac{M^2}{2LL_m}}$$

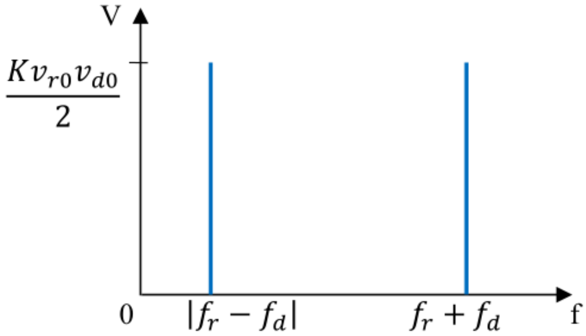
13) En sorti du multiplieur :

$$v_X(t) = K\, v_d(t)\, v_r(t) = K v_{r0} v_{d0} \cos(2\pi f_r t)\cos(2\pi f_d t)$$

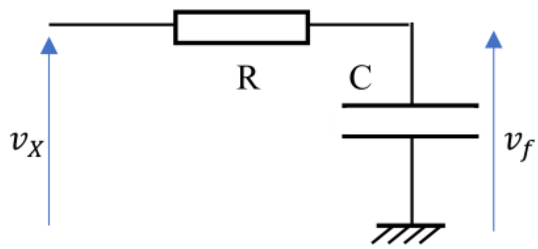
À l'aide du formulaire :

$$\boxed{v_X(t) = \frac{K v_{r0} v_{d0}}{2}\left[\cos(2\pi(f_r + f_d)\, t) + \cos(\cos(2\pi \Delta f\ t))\right]}$$

Spectre :



14) On souhaite conserver la composante basse fréquence. Il faut un filtre passe-bas (le RC ci-dessous). Il faut choisir la fréquence de coupure juste au-dessus de Δf de sorte à couper au maximum la composante haute fréquence.



15) L'écart Δf est la fréquence des oscillations lentes visibles sur la figure de l'énoncé. On mesure alors une période de $T = \frac{0{,}04}{6} = 6{,}67\ \text{ms}$, soit $\boxed{\Delta f = 150\ \text{Hz}}$. En sortie du filtre, on aura un signal quasi-sinusoïdal de fréquence Δf et d'amplitude 0,5 V environ.

--------------------------------- Fin de la partie II ---------------------------------

III - Fonctionnement d'un capteur électromagnétique

16) Vecteur surface de la spire immergée dans le champ magnétique :

$$\vec{S} = -\ell x_M\, \vec{e}_y = -\ell\left(x_C + \frac{\ell}{2}\right)\vec{e}_y$$

On en déduit le flux :

$$\boxed{\phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = -B_0\ell\left(x_C + \frac{\ell}{2}\right)}$$

Loi de Faraday :

$$\boxed{e = -\frac{d\phi}{dt} = B_0 \ell v_0}$$

17) Vecteur surface de la spire immergée dans le champ magnétique :

$$\vec{S} = -\left(\left(\frac{L}{2} + x_C\right)2R + \frac{\pi R^2}{2}\right)\vec{e}_y$$

On en déduit le flux :

$$\boxed{\phi = -B_0\left(\left(\frac{L}{2} + x_C\right)2R + \frac{\pi R^2}{2}\right)}$$

Loi de Faraday :

$$\boxed{e = -\frac{d\phi}{dt} = 2RB_0v_0}$$

18) Rayon R_k :

$$\boxed{R_k = R_0 + \frac{k}{N-1}(R_{N-1} - R_0)}$$

Force électromotrice dans cette boucle (cf. question précédente) :

$$\boxed{e_k = -\frac{d\phi_k}{dt} = 2R_kB_0v_0}$$

Les boucles sont en série, la fem totale est donc la somme des fem de chaque boucle :

$$e_{tot} = \sum_{k=0}^{N-1} e_k = 2B_0v_0\left(NR_0 + \frac{R_{N-1} - R_0}{N-1}\,\frac{N(N-1)}{2}\right)$$

Après simplification :

$$\boxed{e_{tot} = B_0v_0N(R_0 + R_{N-1})}$$

<u>Remarque</u> : on retrouve bien $e = 2RB_0v_0$ lorsque $N = 1$.

--------------------------------- Fin de la partie III ---------------------------------